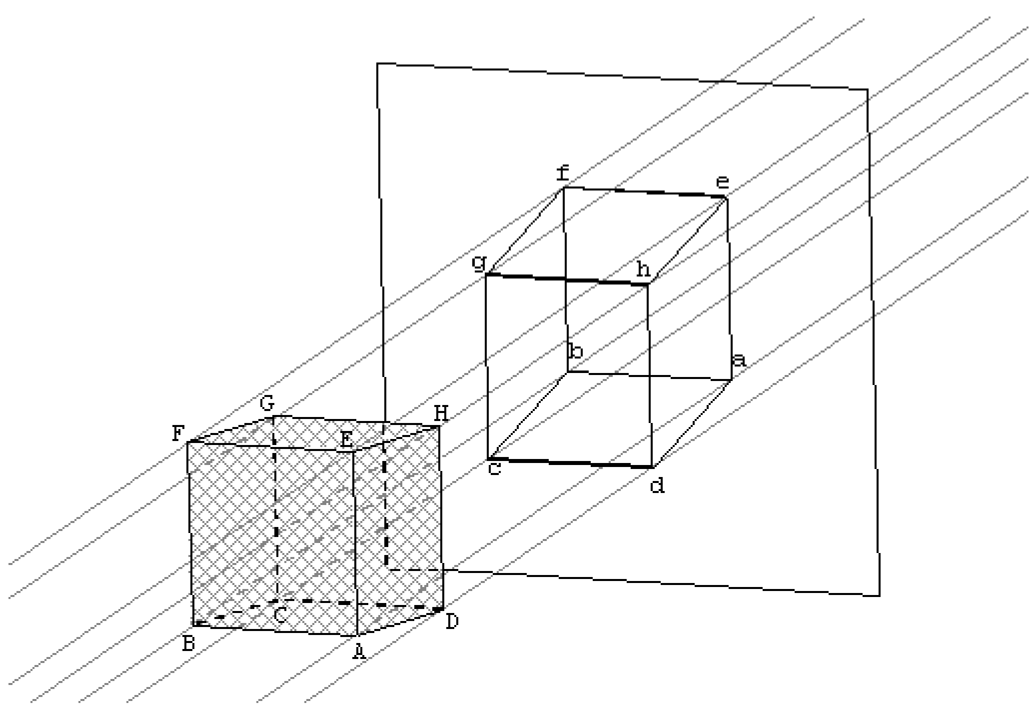
Chapitre 2 : La perspective parallèle

I. Pré-requis

1. Une droite qui a deux points dans un plan est tout entière dans ce plan.
2. Un plan est déterminé par :
   a. trois points non alignés.
   b. ou par une droite et un point non situé sur cette droite,
   c. ou par deux droites sécantes
   d. ou par deux droites parallèles distinctes.
3. L'intersection de deux plans est une droite.
4. Si un plan coupe un autre plan P selon la droite d, alors il coupe tout plan parallèle à P selon une droite parallèle à d.
5. Deux droites parallèles sont deux droites situées dans un même plan et parallèles dans ce plan.
6. Théorème « du toit » : Si trois plans sont sécants deux à deux, alors les trois droites d'intersection sont concourantes ou parallèles.
7. Dans tout plan de l'espace, tout théorème de géométrie plane est vrai.

II. La projection sur un plan.

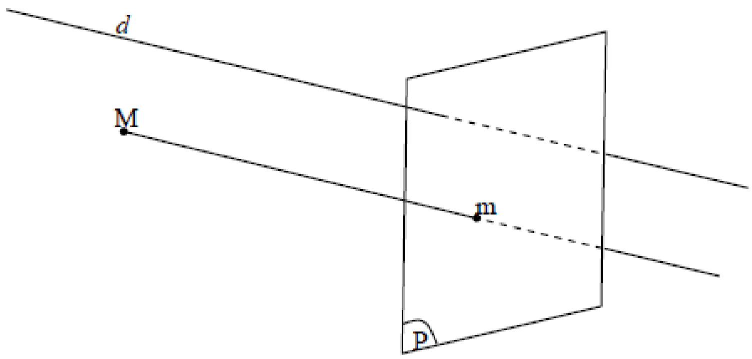


Définition :
Soit un plan P et une droite *d* non parallèle à P.
A tout point M de l'espace, on fait correspondre le point *m*, intersection du plan P avec la parallèle à *d* passant par M :

Cette « transformation » est appelée : **perspective parallèle sur le plan P parallèlement à la droite *d***.

Le plan P est le plan de projection de la perspective et la direction de *d* est sa direction.

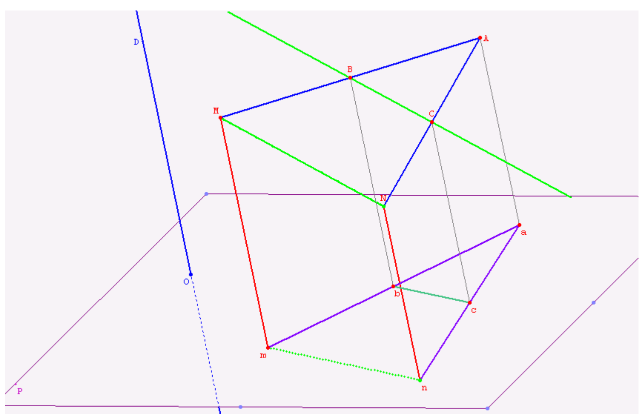
Tout plan parallèle au plan P est appelé plan frontal.



Tout objet, donc toute figure située dans un plan frontal, est représentée ou projetée en vraie grandeur (ou à l'échelle).

III. Propriétés conservées par la perspective parallèle.

1. Image d'une droite ou d'un segment.



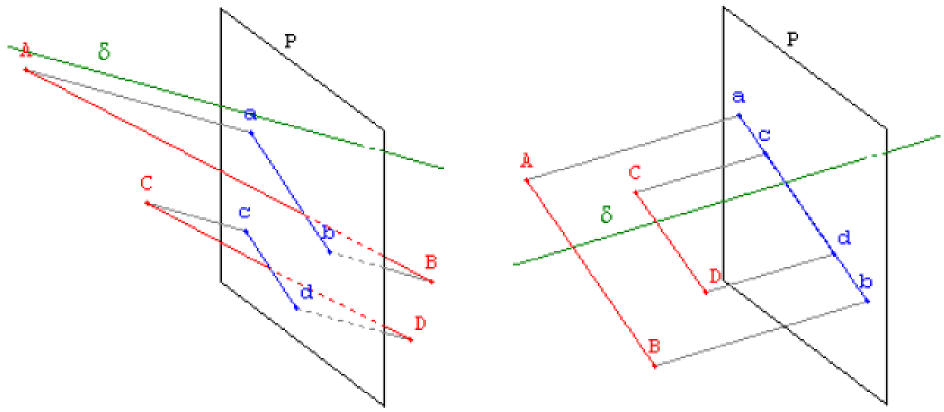
Soit une droite (AB).
► Si la droite (AB) est parallèle à *d* (droite de projection), alors l'image de la droite (AB) est réduite à un point (le point d'intersection de la droite (AB) et du plan *P*)
►Sinon,
L'image de la droite (AB) est la droite (ab)
L'image du segment [AB] est [ab].
Cas particuliers :
- Si (AB) est incluse dans *P*, son image est confondue avec elle-même.
- Si (AB) est parallèle à *P*, alors elle est parallèle à son image.

2. Parallélisme.

Soit deux droites (AB) et (CD) non parallèles à *d*.

- Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors leurs images (ab) et (cd) sont des droites parallèles.

- La même propriété est vraie pour les segments.



On dit que la perspective parallèle conserve le parallélisme.

Cas particulier :
Si la droite (CD) est incluse dans le plan contenant (AB) et parallèle à *d*, alors leurs images (ab) et (cd) sont confondues.

Conséquence : L'image d'un parallélogramme est un parallélogramme.

C'est une conséquence directe de la conservation du parallélisme.

3. Rapport de longueurs.

Si I est le milieu de [AB], alors i est le milieu de [ab].

Démonstration :
I est le milieu de [AB].
On prend un point C et on construit D son symétrique par rapport à I.
Alors ABCD ou ABDC est un parallélogramme.
Donc abcd est un parallélogramme.
I étant l'intersection de [AB] et [CD], son image i est l'intersection de [ab] et [cd].
abcd est un parallélogramme donc i est le milieu de [ab].

De manière générale, si A, B et C sont alignés, leurs images a, b, c sont alignés tels que $\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}$

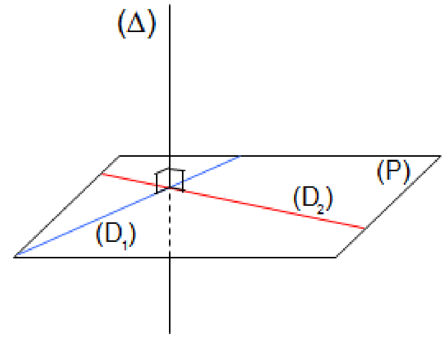
.**Démonstration :** C'est le théorème de Thalès car (Aa), (Bb) et (Cc) sont parallèles

4. Propriétés non conservées :

Les longueurs et les mesures des angles ne sont pas conservées en générale.

Conséquence : l'image d'un rectangle, ou d'un carré est souvent un simple parallélogramme.

IV. Les différentes représentations d'un cube



Soit un plan P et une droite (Δ) non incluse dans P.
On dit que la droite (Δ) est orthogonale au plan P si et seulement si il existe 2 droites D_1 et D_2 incluses dans P telles que :

- D_1 et D_2 sont sécantes en un point O appartenant à (Δ)
- D_1 et (Δ) sont perpendiculaires en O
- D_2 et (Δ) sont perpendiculaires en O

Une représentation en perspective parallèle est caractérisée par un rapport r et un angle dit *de fuite* α

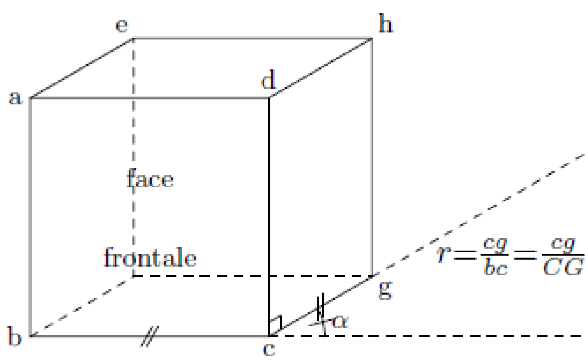
Le nombre r est le rapport sur la représentation en perspective de la longueur d'un segment parallèle au plan de projection (l'écran) par celle d'un segment de même longueur mais orthogonal au plan de projection. C'est aussi le rapport de la longueur de la représentation d'un segment par la longueur de ce segment si celui-ci est sur une ligne de fuite (c'est-à-dire orthogonal aux plans frontaux).

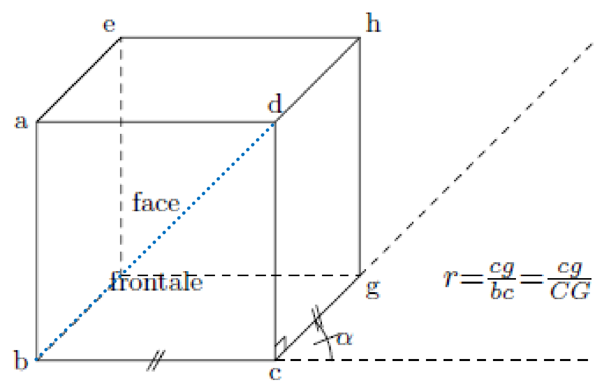
L'angle de fuite α est l'angle formé sur la représentation en perspective par une parallèle et une perpendiculaire aux plans frontaux.

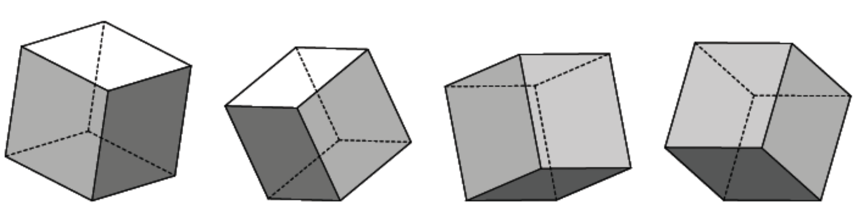
Une perspective parallèle est entièrement déterminée par la perspective d'un cube.

Sur la figure ci-dessous à gauche, on a tracé en perspective cavalière un cube en utilisant α= 30° et $r = \frac{1}{2}$,.
(cg) et (dh) sont des fuyantes.

L'AFNOR (Association française de normalisation) recommande d'utiliser la perspective cavalière ($\frac{1}{2}$, 45°), qu'elle appelle projection cavalière courante. Son inconvénient majeur est que les fuyantes et les diagonales du carré de la face frontale sont confondues.
On a représenté ci-dessous à droite un cube en perspective cavalière courante, où les droites (dh) et (bd) semblent confondues.







un même cube depuis différents points de vue.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Perspective parallèle Projection sur un plan parallèlement à une droite.		Une étude des propriétés de l'ombre au soleil portée sur un plan constitue une approche adaptée.
Propriétés conservées ou non par cette projection.	- Connaître les propriétés usuelles : conservation des milieux, des rapports et des contacts, mais non des longueurs ou des angles (sauf exception).	Ces propriétés apparaissent comme des propriétés géométriques et non comme de simples conventions de dessin. Aucun développement théorique n'est attendu. La notion d'orthogonalité d'une droite et d'un plan est introduite à cette occasion.
Cas particulier de la perspective cavalière : - Image d'un quadrillage - Image d'un cube.	- Utiliser l'image d'un quadrillage ou d'un cube pour réaliser une représentation en perspective cavalière.	Au sujet de la perspective cavalière, on insiste sur l'importance du choix du plan frontal.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Solides Représentation des solides simples (cube, prisme et pyramide) en perspective parallèle.	- Représenter en perspective cavalière des scènes ou des objets composés de solides simples. - Concevoir un patron de solide simple à partir de sa représentation en perspective.	À l'occasion d'études d'exemples on découvre l'intérêt d'autres perspectives parallèles (ou axonométriques).
Section d'un solide simple (cube, prisme et pyramide) par un plan.	- Représenter en perspective ou en vraie grandeur des sections planes.	Pour aborder ces problèmes, les élèves manipulent des solides et utilisent des logiciels de géométrie ou de dessin en 3D. On évoque les sections du « cube des couleurs », couramment utilisé en infographie.