Chapitre 6 Fiche n°2 : Construire un pentagone régulier

Le pentagone régulier a été historiquement difficile à dessiner.
Pythagore et ses disciples ont été les premiers à savoir le dessiner et ils ont bien caché leur secret.
L'astuce de Pythagore pour le dessiner a consisté à construire cinq triangles équilatéraux de même dimension afin de former une pyramide à cinq faces. Puis, à l'aide d'un crayon, il a dessiné les contours de la base de la pyramide ainsi obtenu ce qui lui a donné le pentagone régulier.
Le symbole des Pythagoriciens était l'étoile à cinq branches obtenue avec les diagonales du pentagone régulier.

Nous étudierons dans cette fiche 2 autres méthodes de construction d'un pentagone.

1) Construction d'un pentagone régulier: méthode des cercles tangents

1) Placer deux points O, A
2) Tracer le cercle c_1 de centre O, de rayon r, passant par A.
3) Placer le point A' , le symétrique de A par rapport à O.
4) Tracer un rayon perpendiculaire au diamètre [AA'], et placer le point I, le milieu de ce rayon
5) Tracer le cercle c_2 de centre I et de rayon $\frac{r}{2}$ (c_2 passe par le point O)
6) Tracer la droite (A'I) qui coupe le cercle c_2 en P et Q.
7) Tracer les cercles c_3 et c_4 sont de centre A' et passant respectivement par P et par Q.

Le cercle c_3 est tangent intérieurement au cercle c_2 en P et le cercle c_4 est tangent extérieurement au cercle c_2 en Q.
Le cercle c_3 coupe c_1 en B et E et le cercle c_4 coupe c_1 en C et D. Les points A, B, C, D et E sont les sommets du pentagone cherché.

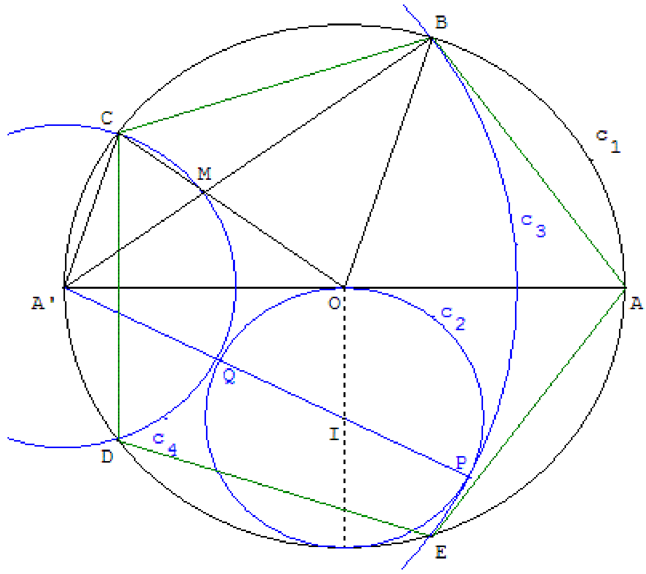
Démonstration :

Dans triangle rectangle A’OI rectangle en O , on a (théorème de Pythagore) :

$A'O^2 = A'I^2 - IO^2 = A'I^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2$

$A'O^2 = (A'I - \frac{r}{2})(A'I + \frac{r}{2})$

$A'O^2 = (A'I - IQ)(A'I + IP) = A'Q \,.\, A'P$.



$A'O^2$ est donc le produit des rayons des cercles c_3 et c_4.

Soit M le point d’intersection de la droite (A’B) et du cercle c_4.

Le produit des rayons est donc :

$A'O^2 = A'M \,.\, A'B$ soit $\frac{\square}{AM} = \frac{\square}{AC}$

Ayant déjà l’angle $O\hat{A}'B$ en commun les triangles A’MO et A’OB sont semblables. C’est-à-dire qu’ils ont les mêmes mesures d’angles.

Le triangle A’OB ayant deux côtés égaux à r , il est isocèle en O. Le triangle A’MO est donc isocèle en M.

Soit α la mesure des angles égaux $O\hat{A}'B = O\hat{B}A' = M\hat{O}A'$.

Les angles principaux des triangles isocèles sont donc $A'\hat{M}O = A'\hat{O}B = 180 - \square$

D’autre part, le triangle BOM est isocèle en B (puisque BM = QP = r = OB).

D’où $M\hat{O}B = \frac{\square}{2} = 90 - \square$

On a donc : $A'\hat{O}B = 180 - \square = A'\hat{O}M + M\hat{O}B = \alpha + \square$.

On résout l’équation obtenue afin de trouver la valeur de α :

$180 - \square = \square\,\alpha + 90 \quad \rightarrow \quad 90 = \square \times \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = \square$

De là $\alpha = \square$, $M\hat{O}B = \square$, $A'\hat{O}B = 180 - \square = \square$. Donc $A\hat{O}B = \square$

$\square$ est le deuxième sommet du pentagone.

Le point C d’intersection de la droite (OM) et du cercle c_1 est le troisième sommet du pentagone, car :

$C\hat{O}B = M\hat{O}B = \square$.

Montrons que ce sommet C du pentagone est sur le cercle c_4.

L’angle $C\hat{A}'B$ inscrit dans le cercle c_1 est égal à la moitié de l’angle au centre : $C\hat{A}'B = \frac{1}{2} C\hat{O}B = \square°$.

$C\hat{M}A' = 180 - \square = \square$.

Le troisième angle du triangle A’MC est $M\hat{C}A'$:

$M\hat{C}A' = 180 - \square - \square = \square$.

Ce triangle ayant deux angles égaux, il est isocèle en $\square$: A’M = $\square$.

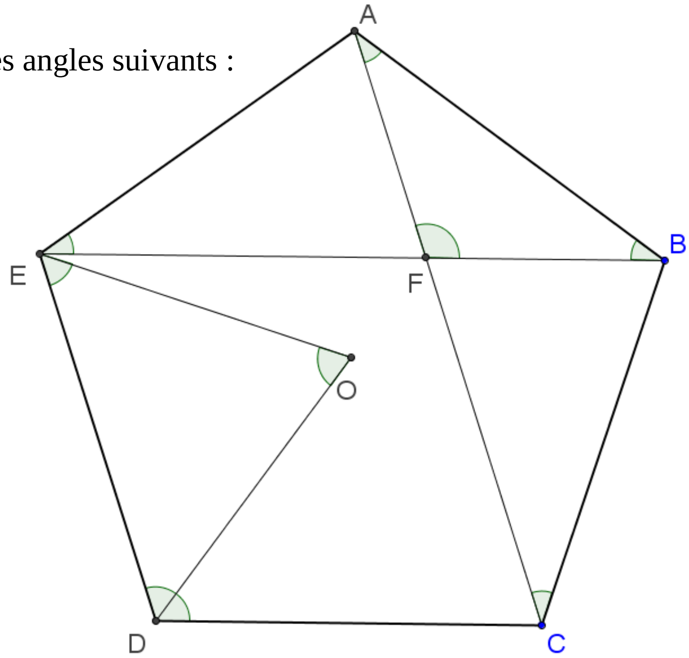
C est bien sur le cercle c_4.

La symétrie par rapport à (AA’) donne les autres sommets E et D.

2) Le pentagone régulier et le nombre d'or

Soit ABCDE un pentagone régulier de centre O.

1) Déterminer la mesure de chacun des angles suivants :



EOD =

DEO =

EDC =

CBA =

BCA =

CAB =

ABE =

AFB =

2) Que peut-on donc en déduire sur les longueurs FB et FA ?

3) D'après ce qui précède, que peut-on construire à partir des points A,F et B ?

Le construire et le noter AFBGH !

Notons *c* la longueur du côté du pentagone ABCDE et *d* la longueur d'une diagonale : DC = *c* CA = *d*

4) Dans le triangle FBC déterminer les mesures de chaque angles.

Que peut-on en déduire ?

5) En déduire une expression de la longueur FB en fonction de *d* et de *c*

6) Ainsi le pentagone AFBGH a pour diagonale [AB] de longueur c et pour côté [FB] de longueur ……

Or tous les pentagones réguliers sont semblables, donc les rapports entre les longueurs sont égaux :

$\frac{AC}{AB} = \frac{d}{c} = \frac{AB}{FB} = \frac{c}{........}$ Si maintenant on pose $c = 1$ en choisissant la longueur AB comme unité.

On a alors $d = \frac{1}{.............}$ soit = 1.

Soit l'équation : = 0

La solution positive de cette équation est le nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dans tous les cas $d = c\,\Phi$. Donc si l'on pose $c = 1$ on aura alors une diagonale de longueur $d = \Phi$

3) Constructions à partir d'un côté

Étant donné un pentagone ABCDE de côté AB = 1, la diagonale BE mesure alors Φ.

À partir de deux points A et B il est possible de trouver la longueur Φ d'une diagonale en réalisant la construction du nombre d'or.

Construction de Φ à partir d'un segment posé comme unité :

A B

1) Construire le point I le milieu du côté [AB]. Puis construire un triangle IAJ rectangle en A tel que AJ = AB

2) Tracer le cercle (c_1) de centre I passant par J qui coupe (AB) en F (« à gauche ») et G (« à droite »).

3) Montrons que BF = AG = Φ.

a) Dans le triangle IAJ , déterminer la longueur AI puis la longueur IJ.

b) En déduire que BF = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = Φ

La longueur BF représente donc la longueur d'une diagonale du pentagone régulier ABCDE.

4) Retrouver à l'aide de ce qui précède, les 3 autres points du pentagone cherchée