Chapitre 3 :
Pavages du plan

I. Formules d'Al- Kashi :

Propriété 1 : Formules d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle quelconque où l'on note :

a : la longueur de [BC]

b : la longueur de [AC]

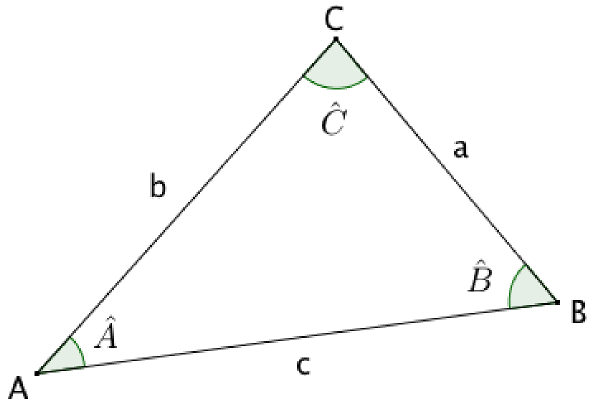
c : la longueur de [AB]

on a alors :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\hat{C})$$



La preuve de ces formules se fait à l'aide des définitions du produit scalaire de 2 vecteurs du plan

Exemple 1: Déterminer la longueur d'un segment

Soit ABC un triangle tel que : $b = AC = 8$, $c = AB = 6$ et $\widehat{BAC} = 60°$
Déterminer la longueur a du segment $[BC]$.

D'après la formule d'Al-Kashi, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

Donc : $a^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos(60) = 64 + 36 - 96 \times \frac{1}{2}$

$$a^2 = 52$$

$$a = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7{,}21$$

Le segment $[BC]$ a une longueur d'environs 7,21.

Exemple 2: Déterminer la mesure d'un angle

Soit ABC un triangle tel que : $a = BC = 9, b = AC = 7$ et $c = AB = 5$
Déterminer la valeur approchée au dixième de degré de la mesure de l'angle en B : $\widehat{ABC} = \hat{B}$
D'après la formule d'Al-Kashi, on a :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{B})$$

Donc : $2ac\cos(\hat{B}) = a^2 + c^2 - b^2$

$$2 \times 9 \times 5 \times \cos(\hat{B}) = 9^2 + 5^2 - 7^2$$

$$90\cos(\hat{B}) = 81 + 25 - 49 = 57$$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{57}{90} = \frac{19}{30}$$

$$\hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{19}{30}\right) \approx 50{,}7$$

L'angle en B du triangle mesure environs 50,7 degrés

II. Isométries du plan :

1) Définition :

Définition 1 :

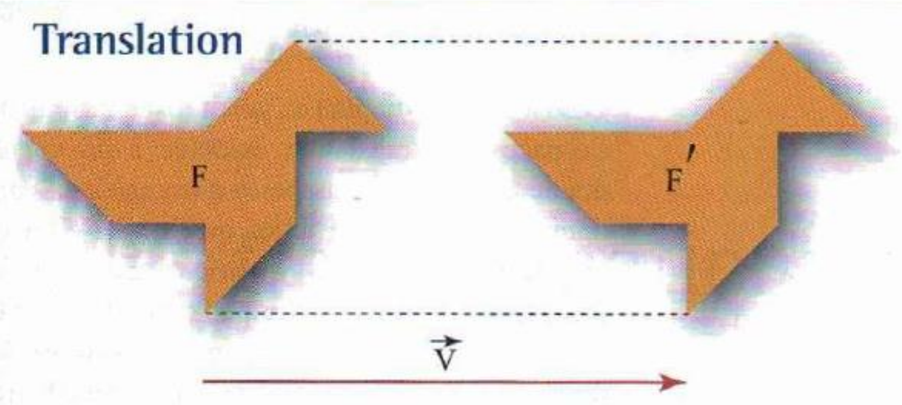
Une isométrie est une transformation du plan dans lui-même **qui conserve les distances**.

Pour tous points A et B du plan, si A’ et B’ sont les images respectives de A et B par cette isométrie du plan, alors :

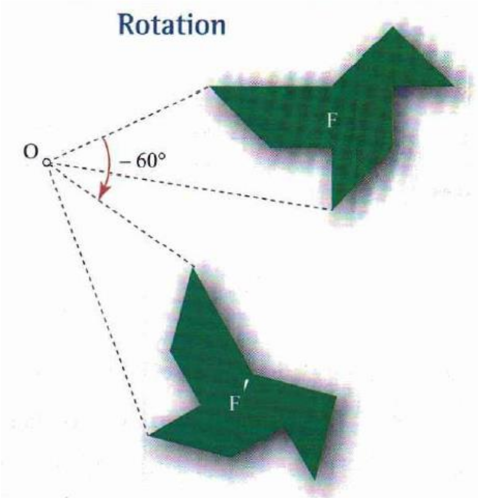
A’B’ = AB

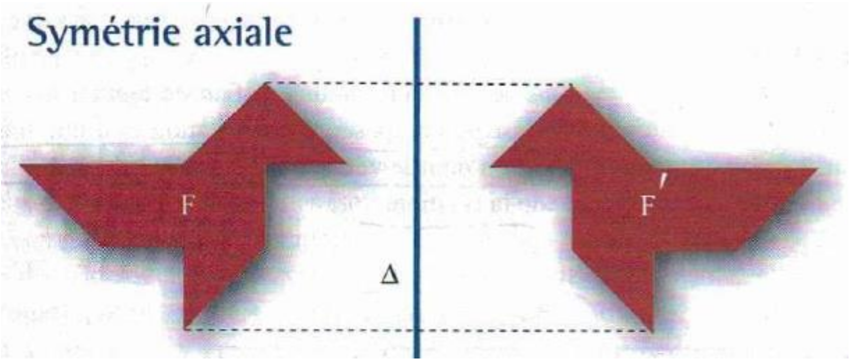
Remarque : Une isométrie du plan conserve également les mesures d’angles géométriques.

Propriété 2 : Les translations, les rotations et les symétries axiales sont des isométries.



Dans une translation de vecteur non nul, il n'y a aucun point qui soit sa propre image. Autrement dit, il n'y a aucun « point fixe » ou « point invariant ».





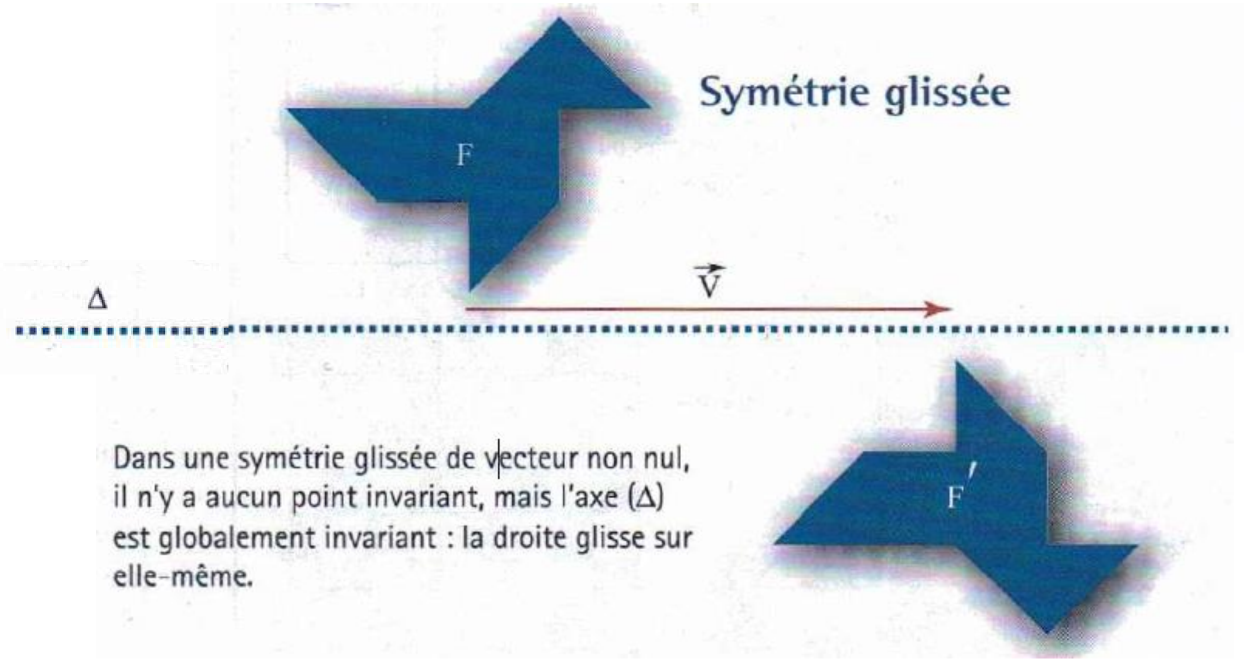
Dans une rotation de centre O et d'angle non nul, il existe un seul point invariant : le centre de rotation. La symétrie centrale (symétrie par rapport à un point) est un cas particulier de rotation d'angle égal à 180°.

Dans une symétrie orthogonale (ou symétrie « axiale » ou encore « réflexion ») d'axe (Δ), les seuls points invariants sont les points appartenant à l'axe de la symétrie.

2) Symétrie glissée :

Définition 2 :

Soit (Δ) une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur colinéaire à $\vec{u}$. On appelle **symétrie glissée d'axe (Δ) et de vecteur $\vec{v}$** la composée de la symétrie axiale d'axe (Δ) et de la translation de vecteur $\vec{v}$.



3) Composition d'isométries :

Propriété 3 :

La composée de deux translations de vecteurs $\vec{u}$ ***et*** $\vec{v}$ est la translation de vecteur ………..

La composée de deux symétries axiales d'axes sécants est une rotation de centre …………………..
………………………………… et d'angle …………………………………………………………...

La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une ………………… de vecteur ……..
…………………………………………………………………………………………………...

La composée de deux symétries centrales de centres O et O' est une translation de vecteur ……….

4) Types d'isométries :

Définition 3 :

Les isométries se classent en deux types : les isométries positives (déplacements ou isométries directes) et les isométries négatives (antidéplacements ou isométries indirectes).

* Un déplacement ou isométrie positive est une isométrie qui conserve *les angles orientés*.

* Un antidéplacement ou isométrie négative est une isométrie qui transforme tout angle orienté en son opposé.

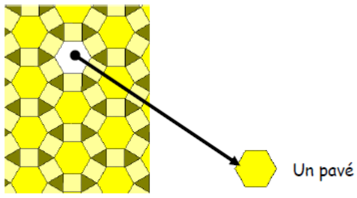
Avec les déplacements, les figures ne sont pas retournées, avec les antidéplacements elles sont au contraire retournées.

Propriété 4 : **Les isométries positives sont les translations et les rotations. Les isométries négatives sont les symétries axiales et les symétries glissées.**

Lien avec les pavages ? Pour créer un pavage périodique du plan, il y a justement 5 façons de paver le plan sans retourner le motif, et si on autorise de retourner ce motif, cela donne 12 façons supplémentaires de paver le plan avec ce motif. On parle des 17 types de pavages périodiques du plan possibles.

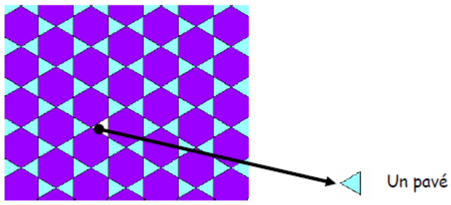
III. Pavages du plan :

1) Définition :



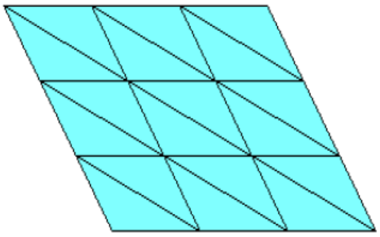
Définition : Un pavage du plan est une famille d'ensembles, appelés pavés, qui couvrent le plan, sans trou, ni chevauchement.

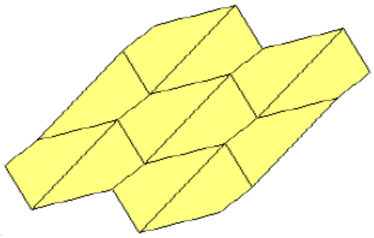
On parle aussi de *tuiles*. Le nombre de types de pavés dépend du pavage.



2) Pavages à pavés isométriques :

On a revu la définition d'une isométrie du plan. Deux pavés sont isométriques lorsqu'ils sont images l'un de l'autre par une isométrie : ils ont donc les mêmes dimensions.





Définition : Les pavages à pavés isométriques sont les pavages réalisés à l'aide d'un seul type de pavé.

On peut montrer que l'on peut réaliser des pavages à pavés isométriques avec **n'importe quel type de triangles**, **n'importe quel type de quadrilatères convexes**, avec **certains pentagones** et aussi avec des lézards (ESCHER).