Chapitre 5 :
Les solides de révolution

I. La rotation autour d'un axe dans l'espace :

1. Définition :

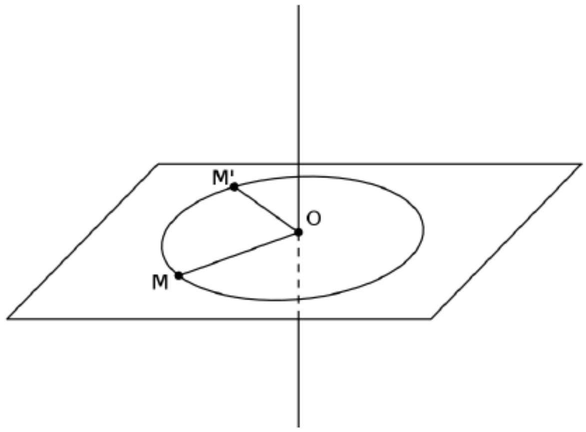
Définition :

On considère une droite (d) de l'espace et un nombre réel θ.

Soit M un point de l'espace n'appartenant pas à (d).

L'image de M par **la rotation d'axe (d) et d'angle $\boldsymbol{\theta}$** est le point M' :

- situé **dans le plan perpendiculaire à la droite (d) passant par M**
- **et** tel que si O est le point d'intersection de (d) avec ce plan : $\widehat{\boldsymbol{MOM'}} = \boldsymbol{\theta}$ (rad ou °)



Le signe de θ indique le sens de la rotation :

Si $\theta > 0$ c'est une rotation de sens anti-horaire, et si $\theta < 0$ c'est une rotation de sens horaire.

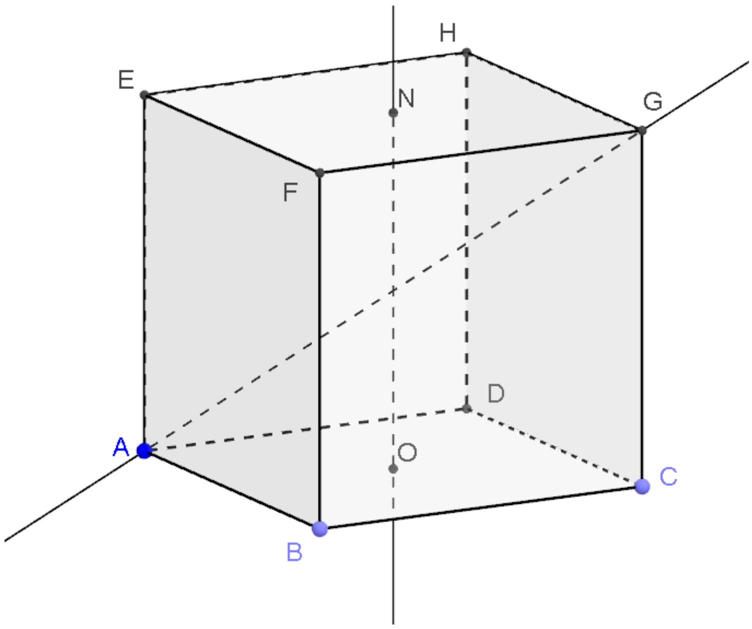
Si M appartient à l'axe (d), alors M est invariant : il est sa propre image.

La rotation de M autour de (d) engendre un cercle de centre O et de rayon OM.

2. Exemples de solides invariants par rotation :

Le cube :

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre où O et N sont les centres des faces ABCD et EFGH :



Il existe 24 rotations laissant invariant le cube (dont l'identité).

En voici 3 toutes données dans le sens anti-horaire :

- La rotation d'axe (AG) et d'angle ….
- La rotation d'axe (EC) et d'angle ….
- La rotation d'axe ……... et d'angle 90°

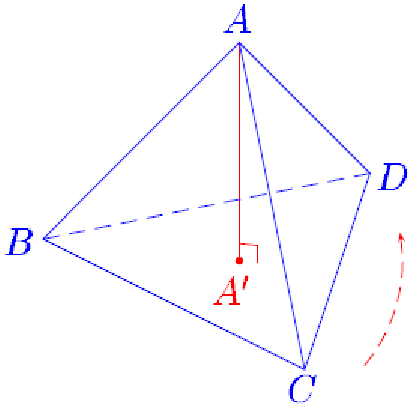
En voyez-vous d'autres ?

Le tétraèdre régulier :

Déterminons les 12 rotations conservant le tétraèdre régulier ABCD :

Autour des hauteurs du tétraèdre :

Soit (AA') l'une de ces hauteurs. Les rotations laissant le tétraèdre invariant sont :



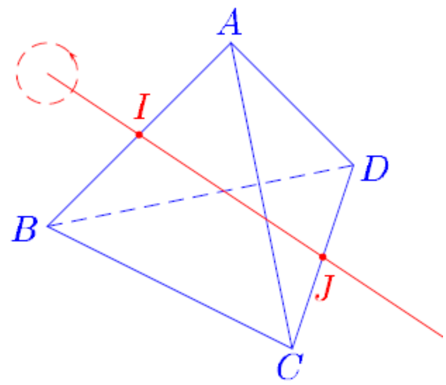
la rotation d'axe (AA') et d'angle ….

la rotation d'axe (AA') et d'angle ….

Il y a …. hauteurs.

Cela donne donc … rotations distinctes

Autour des bimédianes du tétraèdre :



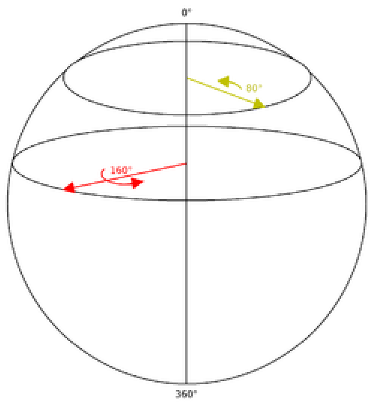
Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD], la droite (IJ) est une bimédiane.

La rotation d'axe (IJ) et d'angle …. laisse le tétraèdre invariant.

Il y a …. bimédianes, ce qui nous donne … rotations distinctes

Cela en fait donc 11. La dernière à ne pas oublier est ………..

La sphère :



Soit une sphère $\mathscr{S}$ de centre O.

Toute rotation d'axe (d) passant par O laisse invariante la sphère $\mathscr{S}$

II. Les solides de révolution

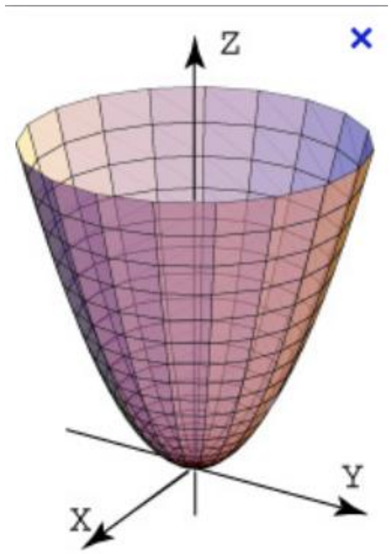
Définition

On considère une droite de l'espace et une courbe.

La rotation de la courbe autour de la droite génère un solide de révolution.

La droite s'appelle alors **l'axe de révolution**.

La courbe s'appelle alors **la génératrice**

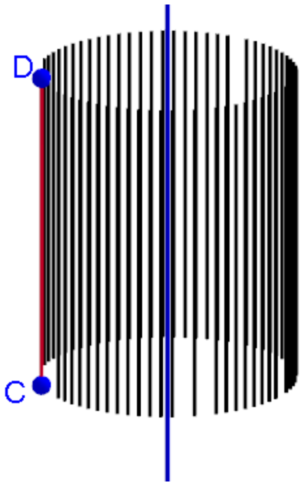


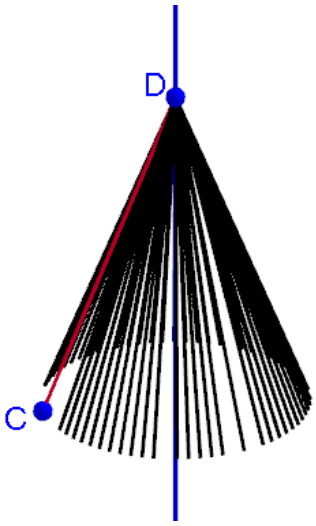
Exemple :

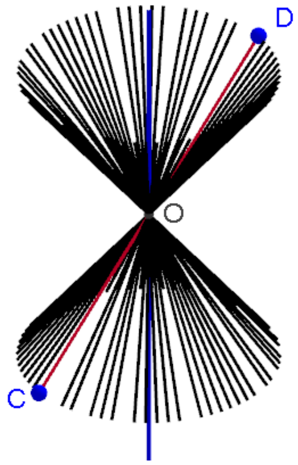
Une parabole dont l'axe de symétrie est l'axe de révolution génère un paraboloïde.

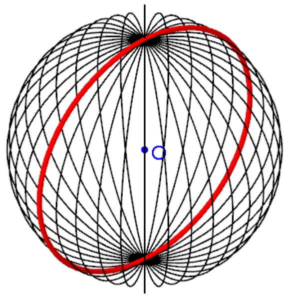
Cas particuliers :

- Une droite strictement parallèle à l’axe de révolution génère un **cylindre**.
- Une droite sécante en un point O à l’axe de révolution génère **un cône de sommet O**.
- Un cercle de centre O point de l’axe et situé dans un plan contenant l’axe génère **une sphère**.







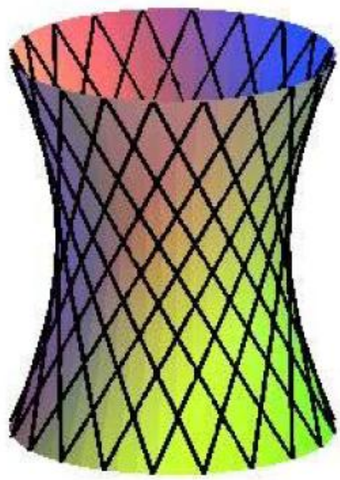


Cas des surfaces réglées :

Surface réglée : en mathématiques, et plus précisément en géométrie, une surface réglée est une surface par chaque point de laquelle passe une droite, appelée **génératrice, contenue dans la surface**.

Les surfaces réglées les plus connues sont : le plan, les cylindres, les cônes, **l’hyperboloïde à une nappe** …

L'hyperboloïde à une nappe est une surface devant son nom au fait qu'il est d'un seul tenant (contrairement à l'hyperboloïde à deux nappes) et qu'on peut l'obtenir par rotation d'une branche d'hyperbole. Il est dit *réglé* car on peut l'obtenir aussi comme enveloppe d'une famille de droites, dites *génératrices*.

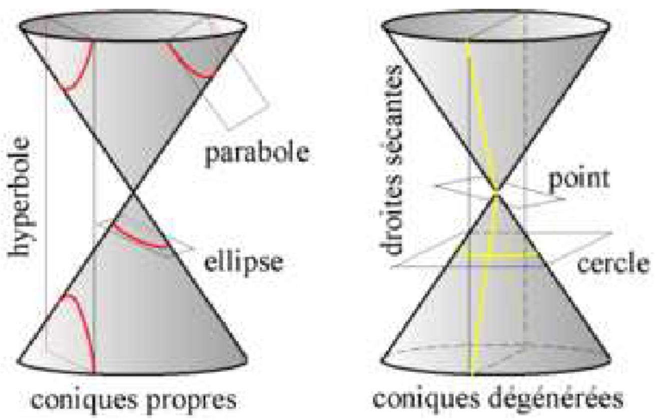


Ci-contre, une hyperboloïde de révolution, elle peut être obtenue par la rotation d’une droite non coplanaire avec l’axe de révolution.
Ce type de structure est très utilisé pour les châteaux d’eau ou encore pour les centrales nucléaires.


Centrale nucléaire de Tricastin (Drôme) & châteaux d'eau aux environs de l'aéroport de Roissy (France)

III. Sections d'un cone de révolution

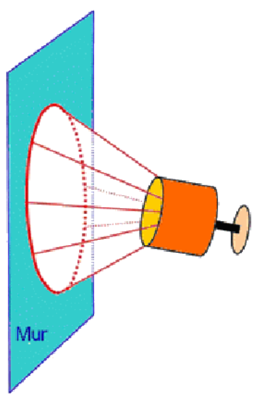
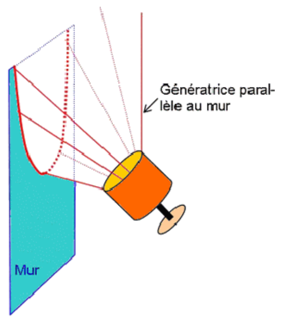
On considère un cône de centre O et de génératrice (d) et un plan P. On s'intéresse à l'intersection du cône et du plan.



On rencontre les différentes situations :
Si le plan P passe par O :
 s'il contient une génératrice, alors l'intersection est la génératrice.
 s'il ne contient pas une génératrice, alors l'intersection est le point O.
 s'il contient l'axe du cône, alors l'intersection est formée de deux droites sécantes en O.

Si le plan P ne passe pas par O :
 s'il est perpendiculaire à l'axe du cône, alor~~s l'inter~~section est un cercle.
 Sinon :
  l'intersection est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant l'angle formé par l'axe du cône et le plan. Ces courbes sont appelées <u>les coniques</u>.

Expérience : Pour comprendre le principe des sections coniques, il suffit de réaliser dans la pénombre une expérience simple à l'aide d'une lampe à abat-jour.
En inclinant l'abat-jour face à un mur, on projette un cône de lumière. Le mur est assimilé au plan de coupe.

<u>1er cas :</u> Toutes les génératrices du cône rencontrent le mur. Le cône de lumière se projette en une **ellipse**. Dans le cas particulier où l'axe du cône est perpendiculaire au mur, l'ellipse est un cercle. 	<u>2ème cas :</u> Une génératrice du cône est parallèle au mur. Le cône de lumière se projette en une **parabole**. 	<u>3ème cas :</u> Des génératrices du cône ne rencontrent pas le mur et dans ce cas un deuxième cône de lumière intercepte le mur. Le cône de lumière se projette en une **hyperbole**.